15.12.15 και 17.12.15.

[Κατευθυνόμενη παράγωγος συνάρτησης]

Ορισμός: Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $f: U \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in U$ και $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\bar{v}\| = 1$ (κατεύθυνση)

Το όριο, εφόσον υπάρχει στο $\mathbb{R}$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+h\bar{v})-f(\bar{x})}{h} =: \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}) \text{ ή } D_{\bar{v}} f(\bar{x})$$

, ονομάζεται παράγωγος κατά κατεύθυνση $\bar{v}$ της f στο $\bar{x}$.

Παρατήρηση: $\frac{\partial f}{\partial e_i}(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$

Θεώρημα: Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\bar{x} \in U$, $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\bar{v}\| = 1$, και f διαφορίσιμη στο $\bar{x} \in U$. Τότε:

$$D_{\bar{v}} f(\bar{x}) = Df(\bar{x}) \cdot \bar{v} = \nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{v}$$

Απόδειξη (υπάρχει και στο E-book Γιαννάκη).

Έστω $\bar{x} \in U$, ανοικτό, δηλ. $\exists\ \varepsilon$ τ.ω.: $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$

$$\Longrightarrow \bar{x} + h\bar{v} \in B(\bar{x}, \varepsilon) \quad \forall\, h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

Θεωρώ $\bar{\phi}(h) = \begin{pmatrix} \phi_1(h) \\ \vdots \\ \phi_n(h) \end{pmatrix} = \bar{x} + h\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + hv_1 \\ \vdots \\ x_n + hv_n \end{pmatrix}$$

Είναι $D\bar{\phi}(0) = \begin{pmatrix} \phi_1'(0) \\ \vdots \\ \phi_n'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \bar{v}$

Από την άλλη, $D_{\bar{v}} f(\bar{x}) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(\bar{x}+h\bar{v}) - f(\bar{x})}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{\phi}(h)) - f(\bar{\phi}(0))}{h} \quad \left(\bar{\phi}(0) = \begin{pmatrix} x_1 + 0v_1 \\ \vdots \\ x_n + 0v_n \end{pmatrix} = \bar{x} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ \bar{\phi})(h) - (f \circ \bar{\phi})(0)}{h} = (f \circ \bar{\phi})'(0)$$

$$= D(f \circ \bar{\phi})(0) = Df(\bar{\phi}(0)) \cdot D\bar{\phi}(0)$$

$$= Df(\bar{x}) \cdot \bar{v} = \nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{v}$$

Άσκηση Γιαννούλη 15.12.15 (Κατευθυνόμενη μερική παράγωγος)

- Εξετάστε αν υπάρχουν οι κατευθυνόμενες μερικές παράγωγοι των κάτωθι συναρτήσεων, και εφόσον υπάρχουν να υπολογισθούν.

- $f_1(x,y) = x^2 + y^2$, στο σημείο $(1,1)$, κατεύθυνσης $(1,1)/\sqrt{2}$

- $f_2(x,y) = \sin(xy)$, στο σημείο $(1,0)$, κατεύθυνσης $(1,\sqrt{3})/2$

- $f_3(x,y,z) = x^2 + ze^y$, στο σημείο $(0,0,1)$, κατεύθυνσης $(1,0,1)/\sqrt{2}$

- $f_4(x,y,z) = e^{xyz}$, στο σημείο $(1,1,1)$, κατεύθυνσης $(1,2,-1)/\sqrt{6}$

Λύση:

(Για την f_1)

Είναι, $\nabla f_1(x,y) = 2(x,y)$, συνεχής στο $\mathbb{R}^2$,

άρα f_1 συνεχώς διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2 \Rightarrow f_1$ διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \exists\, D_{\bar{v}} f_1(x,y)\ \forall\, \bar{v} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\bar{v}\| = 1\ \ \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$

, οπότε $\exists\, D_{(1,1)/\sqrt{2}} f_1(1,1)$, και χρησιμοποιώντας τη διαφορισιμότητα

της f_1 στο $\mathbb{R}^2$, έχω ότι $D_{(1,1)/\sqrt{2}} f_1(1,1) = \nabla f_1(1,1) \cdot (1,1)/\sqrt{2}$

$= 2(1,1) \cdot (1,1)/\sqrt{2} = \boxed{2\sqrt{2}}$

(Για την f_2)

Είναι, $\nabla f_2(x,y) = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \right) = \left(y\cos(xy), x\cos(xy) \right)$

$= \cos(xy)\left(y,x\right)$, συνεχής στο $\mathbb{R}^2$, λόγω του ότι:

$$\left. \begin{array}{l} (x,y) \longmapsto \cos(xy), \text{ συνεχής στο } \mathbb{R}^2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad \text{(τριγωνομ. σύνθεση)} \\ (x,y) \longmapsto y, \text{ συνεχής στο } \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto x, \text{ συνεχής στο } \mathbb{R}^2 \end{array} \right\} \nabla f_2(x,y) \text{ σύνθεση συνεχών (γινόμενο) και άρα συνεχής στο } \mathbb{R}^2$$

, άρα f_2 συνεχώς διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2 \Longrightarrow f_2$ διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow \exists\, D_{\bar{v}} f_2(x,y) \ \forall \ \bar{v} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\bar{v}\| = 1 \ \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$

, οπότε $\exists\, D_{(1,\sqrt{3})/2} f_2(1,0)$, και χρησιμοποιώντας τη διαφορισιμότητα

της f_2 στο $\mathbb{R}^2$, έχω ότι $D_{(1,\sqrt{3})/2} f_2(1,0) = \nabla f_2(1,0) \cdot (1,\sqrt{3})/2$

$= \cos(1\cdot 0)\left(0,1\right) \cdot \left(1,\sqrt{3}\right)/2 = \left(0,1\right) \cdot \left(1,\sqrt{3}\right)/2 = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(Για την f_3)

Είναι, $\nabla f_3(x,y,z) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z)\right)$

$= \left(2x, ze^y, e^y\right)$, συνεχής στο $\mathbb{R}$, λόγω του ότι:

$$\left\{\begin{array}{l} (x,y,z) \longmapsto 2x, \text{ συνεχής στο } \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \longmapsto ze^y, \text{ συνεχής στο } \mathbb{R}^3 \text{ (γινόμενο συνεχών)} \\ (x,y,z) \longmapsto e^y, \text{ συνεχής στο } \mathbb{R}^3 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \nabla f_3(x,y,z)$ έχει συνεχείς συνιστώσες στο $\mathbb{R}^3$, άρα είναι κι η ίδια συνεχής στο $\mathbb{R}^3$.

Άρα f_3 συνεχώς διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^3 \Rightarrow f_3$ διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \exists\, D_{\bar{v}} f_3(x,y,z)$ $\forall\, \bar{v} \in \mathbb{R}^3$ με $\|\bar{v}\| = 1$ $\forall\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

, οπότε $\exists\, D_{(1,0,1)/\sqrt{2}} f_3(0,0,1)$, και χρησιμοποιώντας τη διαφορισιμό-

τητα της f_3 στο $\mathbb{R}^3$, έχω ότι $D_{(1,0,1)/\sqrt{2}} f_3(0,0,1) = \nabla f_3(0,0,1) \cdot (1,0,1)/\sqrt{2}$

$= (2\cdot 0, 1\cdot e^0, e^0) \cdot (1,0,1)/\sqrt{2} = (0,1,1)\cdot(1,0,1)/\sqrt{2}$

$= \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(Για την f_4)

Είναι, $\nabla f_4(x,y,z) = \left(\frac{\partial f_4}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f_4}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f_4}{\partial z}(x,y,z) \right)$

$= \left(yze^{xyz}, xze^{xyz}, xye^{xyz} \right) = e^{xyz}\left(yz, xz, xy \right),$

συνεχής στο $\mathbb{R}^3$, λόγω του ότι:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x,y,z) \mapsto e^{xyz}, \text{ συνεχής στο } \mathbb{R}^3 \text{ (εκθετική σύνθεση συνεχών)} \\ (x,y,z) \mapsto yz, \text{ συνεχής στο } \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto xz, \text{ συνεχής στο } \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto xy, \text{ συνεχής στο } \mathbb{R}^3 \end{array} \right\}$$

$\Longrightarrow \nabla f_4(x,y,z)$ συνεχής ως γινόμενο συνεχών στο $\mathbb{R}^3$

Άρα f_4 συνεχώς διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^3 \Longrightarrow f_4$ διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^3$

$\Longrightarrow \exists\, D_{\bar{v}} f_4(x,y,z) \ \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^3$ με $\|\bar{v}\| = 1 \ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

, οπότε $\exists\, D_{(1,2,-1)/\sqrt{6}} f_4(1,1,1)$, και χρησιμοποιώντας τη

διαφορισιμότητα της f_4 στο $\mathbb{R}^3$, έχω ότι:

$$D_{(1,2,-1)/\sqrt{6}} f_4(1,1,1) = \nabla f_4(1,1,1) \cdot (1,2,-1)/\sqrt{6}$$

$$= (e,e,e) \cdot (1,2,-1)/\sqrt{6}$$

$$= \frac{2e}{\sqrt{6}} = \frac{2e\sqrt{6}}{6} = \boxed{\frac{e\sqrt{6}}{3}}$$

[Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης]

Ορισμός: Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $n \geq 2$, $\kappa \in \mathbb{N}$

Η f ονομάζεται,

(α) $\kappa+1$ φορές μερικώς διαφορίσιμη,
αν υπάρχουν οι μερικές της παράγωγοι έως και τάξης $\kappa+1$.

(β) κ φορές συνεχώς διαφορίσιμη,
αν είναι κ φορές μερικώς διαφορίσιμη και όλες οι μερικές της παράγωγοι είναι συνεχείς.

Παράδειγμα: Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = xy + (x+2y)^2$$

Να βρεθούν, εφόσον υπάρχουν, όλες οι μερικές παράγωγοι της f.

Λύση:
Προφανώς $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ως πολυώνυμο του x, y, απείρως συνεχώς διαφορίσιμο.

Θα είναι:

– Α' τάξης $(\kappa=0)$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, με

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(xy+(x+2y)^2\right) = y+2x+4y$$
$$= 2x+5y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy+(x+2y)^2\right) = x+4x+8y$$
$$= 5x+8y$$

– Μεικτές : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$, με

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(5x+8y) = 5$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2x+5y) = 5$$

Β' τάξης $(\kappa=1)$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$, με

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x+5y) = 2.$$

Ομοίως, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = 8.$